【20】

氏　　　　名	高　尾　和　人
博士の専攻分野の名称	博　士（理学）
学 位 記 番 号	第　２５１８２　号
学位授与年月日	平成 24 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当 理学研究科数学専攻
学 位 論 文 名	Reidemeister-Singer distance of Heegaard splittings and Hempel distance of bridge decompositions （Heegaard 分解の Reidemeister-Singer 距離と橋分解の Hempel 距離）
論文審査委員	（主査） 教　授　大鹿　健一 （副査） 教　授　満渕　俊樹　　教　授　後藤　竜司　　准教授　遠藤　久顕 准教授　宮地　秀樹

論 文 内 容 の 要 旨

複雑でよく分からないものを単純な部品に分解して考えるのは数学の常套手段である．Heegaard 分解とは３次元多様体に対するそのような研究手法の１つであり，橋分解とは絡み目に対する１つである．この学位論文ではこれらの分解のトポロジーに関する筆者の研究結果について述べる．

３次元多様体 M が閉曲面 $\Sigma \subset M$ によって２つのハンドル体 $V^-, V^+ \subset M$ へ分解されるとき，(Σ, V^-, V^+) を M の Heegaard 分解という．任意の向き付け可能な閉３次元多様体に Heegaard 分解が存在するが一意的ではなく，各多様体が許容する Heegaard 分解を分類することが３次元トポロジーの重要な問題となっている．Reidemeister と Singer は１つの多様体の任意２つの Heegaard 分解は stabilization と destabilization を有限回施してイソトピックにできることを示した．Stabilization とは与えられた Heegaard 分解から新しい Heegaard 分解を構成する操作であり，destabilization はその逆操作である．２つの Heegaard 分解に対して，それらをイソトピックにするためのこれらの操作の最小回数を Reidemeister-Singer 距離と呼ぶ．

Heegaard 分解には Morse 関数との自然な対応関係があり，多様体 M の Heegaard 分解 (Σ, V^-, V^+), (T, W^-, W^+) を表現する Morse 関数 $F, G : M \to \mathbb{R}$ がとれる．ここで直積写像 $F \times G : M \to \mathbb{R}^2, p \mapsto (F(p), G(p))$ は安定写像と仮定でき，このときの $F \times G$ の特異値集合は graphic と呼ばれる．Johnson は (Σ, V^-, V^+), (T, W^-, W^+) の Reidemeister-Singer 距離を graphic の言葉で上から評価した．第１章ではこの評価を Heegaard 曲面の種数と $f \times g$ の特異点の言葉に帰着させる．

定理 1. ヒーガード分解 (Σ, V^-, V^+), (T, W^-, W^+) の Reidemeister-Singer 距離は高々 $\mathrm{g}(\Sigma) + \mathrm{g}(T) + c(F \times G)/2$.

安定写像の特異点は折り目特異点とカスプ特異点に分類されるが，定理中の $c(F \times G)$ はカスプ特異点の数である．この結果は，ある種の特異点論によって Reidemeister-Singer 距離に対する最良の評価が導かれる可能性を示唆している．

Hempel 距離とは Heegaard 分解の複雑さの尺度として導入された不変量だが，その定義は絡み目の橋分解にも拡張され結び目理論との密接な関係が知られている．しかし一般の Heegaard 分解や橋分解に対してその Hempel 距離を計算することは難しく，特に下から評価する方法は大きな問題である．第２章では３次元球面内の絡み目の n-橋分解（$n \geq 3$）に対して，その Hempel 距離を評価するための次のような実践的手段を与える．

定理 15. 橋分解の橋図式が混和条件を満たせば Hempel 距離は２以上．

与えられた橋分解の橋図式を描き混和条件の成否を確認することは容易であり，適用可能な橋分解の例は多数存在する．

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者の研究テーマは３次元多様体の Heegaard 分解，及び結び目補空間におけるその類似物である，橋分解である．

本論文はこのテーマにおける２つの研究をまとめたものである．

第１部においては，Heegaard 分解の stablization 問題に関連した，Reidemeister-Singer 距離ついての研究成果が述べられている．同じ多様体の２つの Heegaard 分解が与えられたとき，それらに対して，Rubinstein-Scharleman 図式と呼ばれるものが定義される．これはそれぞれの分解に対応する Morse 関数から決まるものである．申請者はこの Rubinstein-Scharleman 図式に現れる，尖点型特異点の数と Heegaard 分解の種数により，Reidemeister-Singer 距離の評価を与えた．具体的には，Reidemeister-Singer 距離は g_1+g_2+c 以下であることを示した．ここで g_1, g_2 はそれぞれの Heegaard 分解の種数であり，c は Rubinstein-Scharleman 図式の尖点型特異点の

数である．この評価はこれまで知られていた Reidemeister-Singer 距離の評価を改良しており，今後特異点論的研究をさらに重ねれば，best possible な評価に到達する可能性を持っている．

第 2 部においては，結び目の橋分解についての Hempel 距離が題材である．Hempel 距離は Heegaard 分解や橋分解において重要な概念であるが，実際に距離を下から評価することは困難である．高尾君は well-mixed condition という条件を導入し，この条件が満たされれば，Hempel 距離は 2 以上であることを証明した．

これらの結果はいずれも Heegaard 分解の研究に寄与するところが大であり，さらに特異点論との結びつきという，将来発展の可能性のある新しい分野を切り開くものである．よって本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。